UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM
FACULTEIT FNWI

Deeltentamen 1 Kansrekening, statistiek en beslissen voor AI
22 maart 2004 9.30 - 12.30

---

1. Een autobedrijf test auto's op het teveel uitstoten van vervuilende gassen. Een auto die teveel uitstoot noemen we een "vuile auto". Stel dat we weten dat 25% van de te testen auto's vuil is. De test geeft bij een vuile auto in 99% van de gevallen aan dat hij inderdaad vuil is, maar doet dit ook in 17% van de schone auto's.

   (a) Wat is de kans dat de test aangeeft dat een onderzochte auto vuil is ?

   (b) Wat is de kans dat een auto vuil is als de test dit aangeeft ?

2. Veronderstel dat de simultane kansverdeling van X en Y gegeven wordt door de volgende tabel:

		Y			
		0	1	2	
X	-1	?	1/16	?	1/4
	0	?	1/8	1/8	?
	1	1/8	?	1/16	?
		1/2	?	1/4	

   (a) Gegeven is verder: $\mathrm{E}(X) = 0$. Vul de tabel aan.

   (b) Zijn X en Y onafhankelijk ?

3. De simultane kansdichtheid $f(x, y)$ van de stochasten X en Y wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y^2 & , \text{ als } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ elders,} \end{cases}$$

   voor een zekere positieve constante c.

   (a) Bereken de waarde van c.

   (b) Bepaal de marginale kansdichtheid en verdelingsfunctie van X.

(c) Bereken de covariantie $C(X,Y)$ van X en Y. Zijn X en Y onafhankelijk ?

4. Men beschikt over een dataset die men opvat als een realisatie van een rij onafhankelijke stochasten $X_1, ..., X_n$. Men veronderstelt dat elke X_i een verdeling heeft met kansdichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, als } x < -\theta, \\ \frac{3}{2}\frac{x^2}{\theta^3} & \text{, als } -\theta \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{, als } x > \theta, \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$.

(a) Bereken de verdelingsfunctie en de variantie van X_1.

(b) Voor welke a en b is de schatter

$$T = a(X_1^2 + \ldots + X_n^2) + b$$

een zuivere schatter van θ^2 ?

(c) Bereken de verwachting van $|X_1|$ en maak een zuivere schatter van θ.

5. **Deze opgave is alleen voor studenten die het tentamen doen in het kader van de overgangsregeling voor Kansrekening en statistiek 1.**

Een statisticus gaat op congres naar Kreta. Men beweert dat de temperatuur in de betreffende maand gemiddeld minstens 20 graden is. Van internet heeft hij 20 temperatuur metingen van eerdere jaren gehaald, $x_1, \ldots, x_{20}$. Hiervan is $\bar{x} = 21$ en $s^2 = 4$. Hij veronderstelt dat de data mogen worden opgevat als een realisatie van een steekproef uit een $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ verdeling en besluit om de t-toets

$$H_0 : \mu = 20 \quad \text{tegen} \quad H_1 : \mu > 20$$

uit te voeren bij significantieniveau 0.05.

(a) Geef de toetsingsgrootheid, de kritieke waarde en het kritieke gebied van deze toets.

(b) Bepaal de waarde van de toetsingsgrootheid.

(c) Wat kan men concluderen op grond van de 20 waarnemingen.

(d) Waarom toetst hij juist deze nulhypothese ?