

Tentamen Specificatietheorie
27 maart 2006

Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. Lees de opgaven zorgvuldig, schrijf duidelijk en beargumenteer je antwoorden. Schrijf op elk ingeleverd blad je naam en je collegekaartnummer. Je mag gebruik maken van het dictaat *Specificatietheorie* van I. Bethke en A. Ponse. Het gebruik van de uitwerkingen van de werkcollegesommen is NIET toegestaan. Succes!

1. Een equationele theorie E in een gegeven signatuur Σ heet *initieel correct met betrekking tot de Σ -algebra A* als geldt dat

$$A \cong \mathbf{I}(\Sigma, E)$$

(zie Definitie 3.26, p. 26). Leg uit waarom het begrip van initiële correctheid belangrijk is als we willen laten zien dat een implementatie aan z'n specificatie voldoet.

2. Zij E de volgende equationele theorie in de signatuur $\Sigma = \{a^0, f^1, g^1, h^2\}$ (zoals gebruikelijk geven de superscripts de plaatsigheid van de operatoren aan):

$$\begin{aligned}g(a) &= a \\g(f(a)) &= f(a) \\g(f(f(x))) &= g(x) \\h(a, y) &= a \\h(f(x), a) &= f(x) \\h(f(x), f(y)) &= h(x, y)\end{aligned}$$

- (a) Laat zien dat voor elke *gesloten* term t in de signatuur Σ geldt dat

$$E \vdash t = \underbrace{f(f(f \dots f(a)) \dots)}_{n \times}$$

voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Zij $A = \langle \mathbb{N}, a_A, f_A, g_A, h_A \rangle$ waar $a_A = 0$, $f_A(n) = n + 1$, en

$$g_A(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even,} \\ 1 & \text{anders,} \end{cases}$$

$$h_A(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{als } n \leq m, \\ n - m & \text{anders.} \end{cases}$$

Bewijs dat E initieel correct is m.b.t. A .

3. Zij E de equationele theorie in de signatuur $\Sigma = \{\epsilon^0, 0^*, 1^*, *, \text{swap}\}$ van de binaire rijtjes met concatenatie en swap, d.w.z. E heeft de volgende axioma's:

$$\begin{aligned} x * \epsilon &= x \\ \epsilon * x &= x \\ (0 * x) * y &= 0 * (x * y) \\ (1 * x) * y &= 1 * (x * y) \\ \text{swap}(\epsilon) &= \epsilon \\ \text{swap}(0 * x) &= 1 * \text{swap}(x) \\ \text{swap}(1 * x) &= 0 * \text{swap}(x) \end{aligned}$$

Hier representeert ϵ het lege rijtje, $x * y$ de aaneenschakeling van de rijtjes x en y , $0 * x$ het rijtje dat verkregen wordt door aan het rijtje x links een 0 toe te voegen, en $1 * x$ het rijtje dat verkregen wordt door aan x links een 1 toe te voegen. swap vervangt bitsgewijs een rijtje door zijn complement.

- (a) Zij $\mathbf{A} = \langle \mathbb{N}, \epsilon_{\mathbf{A}}, 0^*_{\mathbf{A}}, 1^*_{\mathbf{A}}, *_{\mathbf{A}}, \text{swap}_{\mathbf{A}} \rangle$ waar $\epsilon_{\mathbf{A}} = 0$, $0^*_{\mathbf{A}}(n) = 1^*_{\mathbf{A}}(n) = 0$, $n^*_{\mathbf{A}} m = n \times m$ en

$$\text{swap}_{\mathbf{A}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0, \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Laat zien dat $\mathbf{A} \models E$.

- (b) Geldt $E \vdash \text{swap}(\text{swap}(x)) = x$? Zo ja, geef een afleiding; zo nee, weerleg en voeg een axioma aan E toe opdat wel geldt dat $E \vdash \text{swap}(\text{swap}(x)) = x$!

4. Beschouw het onderstaande TRS over de signatuur $\Sigma = \{a^0, f^1, g^2, h^2\}$:

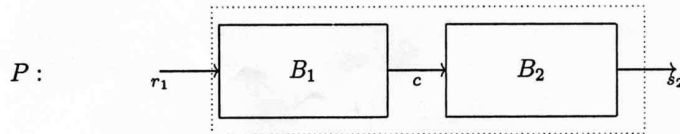
$$\begin{aligned} h(x, y) &\rightarrow f(x) \\ h(x, y) &\rightarrow f(y) \\ g(x, y) &\rightarrow h(x, y) \\ g(x, y) &\rightarrow a \end{aligned}$$

- (a) Wat zijn de gesloten normaalvormen van dit TRS?
 (b) Bewijs je bewering onder (a). D.w.z., bewijs dat ieder gesloten term in de signatuur van dit TRS naar een van je normaalvormen herschrijft.
 (c) Is dit TRS sterk terminerend? Zo ja, bewijs dit; zo nee, geef een oneindige rij herschrijvingen.
 (d) Is dit TRS confluent? Zo ja, bewijs dit; zo nee, geef een completering die sterke terminatie bewaart. Geef in het geval van een completering ook de gesloten normaalvormen.

5. In BPA_{δ}^* kunnen we een buffer B met capaciteit 1 definiëren als $B = (r \cdot s)^* \delta$ waarbij r en s atomaire acties zijn die een datum van een poort lezen en naar een (ander) poort sturen. De bedoeling van deze som is te laten zien dat de parallelle compositie van twee buffers van capaciteit 1 een buffer van capaciteit 2 levert. Zij dus

$$P = \tau_{\{c\}}(\partial_{\{s_1, r_2\}}(B_1 \parallel B_2))$$

met $B_i = (r_i \cdot s_i)^* \delta$ ($i = 1, 2$), $s_1 \mid r_2 = c$ en alle overige communicaties ongedefinieerd (en dus δ). In een plaatje:



- (a) Bewijs in ACP_{τ} dat

$$\tau_{\{c\}}(\partial_{\{s_1, r_2\}}(B_1 \parallel B_2)) = \tau_{\{c\}}(\partial_{\{s_1, r_2\}}(B_2 \parallel B_1)).$$

- (b) Bewijs in ACP_{τ} dat

$$\tau_{\{c\}}(\partial_{\{s_1, r_2\}}(B_1 \parallel s_2 \cdot B_2)) = \tau_{\{c\}}(\partial_{\{s_1, r_2\}}(s_2 \cdot B_2 \parallel B_1)).$$

- (c) Definieer

$$Q = \tau_{\{c\}}(\partial_{\{s_1, r_2\}}(B_1 \parallel s_2 \cdot B_2)).$$

Laat zien dat P en Q een buffer van capaciteit 2 specificeren, d.w.z. laat zien in ACP_{τ} dat P en Q oplossingen zijn voor het reguliere stelsel

$$\begin{aligned} P &= r_1 \cdot Q \\ Q &= s_2 \cdot P + r_1 \cdot s_2 \cdot Q \end{aligned}$$

- (d) Bewijs in $BPA_{\delta}^* + RSP^*$ dat $Q = (r_1 \cdot s_2 + s_2 \cdot r_1)^* \delta$ en dus

$$P = r_1 \cdot ((r_1 \cdot s_2 + s_2 \cdot r_1)^* \delta).$$