Wiskunde voor Informatica 3

KdV Instituut, 24 mei 2007

Geef steeds gemotiveerde antwoorden op de volgende vraagstukken!
NORMERING: opgave 1: 20 punten, opgaven 2, 3, 4, 5, 6: elk 10 punten.

1. De volgende 6 onderdelen staan los van elkaar.

   a. Geef een waarde van α zo, dat $[1\ 1\ 1]^T, [1\ 1\ \alpha]^T, [1\ 0\ 0]^T$ *geen* basis is voor $\mathbb{R}^3$?

   b. Bekijk de ruimte $M_{2,2}$ van de 2×2–matrices. Definieer $\mathcal{T} : M_{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}$ door $\mathcal{T}(A) = \det A$. Is dit een lineaire afbeelding?

   c. Gegeven is de ruimte V van alle continue functies op $\mathbb{R}$.
   Is $W = \{ f \in V \mid f(1) \geq 0 \}$ een lineaire deelruimte van V?

   d. Gegeven is een lineaire afbeelding $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
   Verder is $\mathcal{T}([1\ 0]^T) = [7\ 0]^T$ en $\mathcal{T}([3\ 1]^T) = [20\ 1]^T$.
   Bereken $\mathcal{T}([3\ 4]^T)$.

   e. Geef vier voorbeelden van vectorruimten van dimensie 12.

   f. Bekijk de inproductruimte $\mathbb{R}^3$ met het standaardinproduct.
   Pas Gram-Schmidt toe op het stelsel $[1\ 1\ 0]^T, [1\ -1\ 0]^T, [1\ 2\ 3]^T$ om een orthonormaal stelsel te krijgen.

2. Breng de kwadratische vorm $4x_1^2 + 2x_2x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2$ op hoofdassen. Geef ook de coördinatentransformatie. Let op: deze wordt beschreven door middel van een orthogonale matrix!

3. Bepaal de singuliere waardendecompositie van $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

4. Bepaal de stationaire punten van $f(x, y) = (y^2 - x^2)(y - 3)$. Bepaal in elk van deze punten of f daar wel of niet een extreme waarde aanneemt.

5. Gegeven is een inproductruimte V met inproduct $(.,.)$. De vector a_1 behoort tot V en er geldt dat $\|a_1\| = 1$.
   Definieer $\mathcal{T} : V \longrightarrow V$ door $\mathcal{T}(v) = v - 2(v, a_1)a_1$.

   a. Toon aan dat de afbeelding $\mathcal{T}$ lineair is.

   b. Bewijs dat $\mathcal{T}(\mathcal{T}(v)) = v$ voor alle $v \in V$.

   c. Wat volgt uit onderdeel b over de mogelijke eigenwaarden van $\mathcal{T}$?

   d. Als $a: a_1, a_2, a_3$ een onb van V is, bepaal dan $\mathrm{mat}_{a,a}\mathcal{T}$.

   e. Is $\mathcal{T}$ symmetrisch?

   f. Is $\mathcal{T}$ orthogonaal?

6. a. Als de afbeelding $\mathcal{T} : V \longrightarrow V$ lineair is en λ een reeël getal is, toon dan aan dat $W = \{ v \in V \mid \mathcal{T}(v) = \lambda v \}$ een lineaire deelruimte is van V.

   b. Als λ en μ twee verschillende eigenwaarden van een symmetrische afbeelding $\mathcal{A}$ zijn met bijbehorende eigenvectoren v en w, toon dan aan dat $v \perp w$.