

# Tentamen Basiswiskunde en Logica

14 december 2009, 9:00–12:00 uur.

Hertentamen deel Basiswiskunde: Opgaven 1–4.

Deeltentamen Logica: Opgaven 5–8.

Diegenen die het deel Basiswiskunde al haalden maken dus alleen opgaven 5–8.

*Motiveer uw antwoorden.*

**Opgave 1.** Zij  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de functie  $f(x) = e^x$  en  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de functie  $g(x) = x^2$ .

(a) Wat zijn de samengestelde functies  $f \circ g$  en  $g \circ f$  in dit geval?

(b) Geef van elk van de volgende functies aan of ze injectief zijn (zo niet, geef een tegenvoorbeeld):  $f$ ,  $g$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ .

**Opgave 2.** Definieer een equivalentierelatie  $\sim$  op  $\mathbb{Z}$  door  $x \sim y$  als geldt dat  $x - y$  deelbaar is door 5.

(a) Laat zien dat  $\sim$  een equivalentierelatie is.

(b) Hoeveel equivalentieklassen zijn er? Geef van elke klasse een representant.

**Opgave 3.** Bewijs met volledige inductie dat  $8 \cdot 4^n - 2$  deelbaar is door 6 voor alle  $n \geq 0$ .

**Opgave 4.** Los op:  $x_k = -2x_{k-1} + 5 \cdot 3^k$  ( $k \geq 1$ ),  $x_0 = 9$ .

**Opgave 5.** Harrop's formule is de propositionele formule

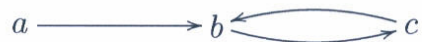
$$(\neg p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r).$$

(a) Wat is een tautologie?

(b) Bewijs met behulp van een semantisch tableau dat Harrop's formule een tautologie is.

**Opgave 6.** Schrijf de formule  $p \wedge (q \rightarrow r)$  in disjunctieve normaalvorm, dat wil zeggen, als een disjunctie van conjuncties.

**Opgave 7.** Beschouw het volgende model  $M$  met de elementen  $a$ ,  $b$ , en  $c$ :



Beschouw verder de taal met alleen het binaire predikaat  $R$ , en interpreteer  $Rxy$  in  $M$  als “er is een pijl van  $x$  naar  $y$ ”. Geef een predikaatformule  $\varphi(x)$  met één vrije variabele  $x$  die  $a$  onderscheidt van de andere elementen, d.w.z. zodat die formule precies geldt voor  $a$  (als we  $x$  bedelen met  $a$ ) en niet voor  $b$  en  $c$ . (Waarschuwing:  $a$ ,  $b$ , en  $c$  zitten *niet* in de taal, dus mogen ook niet in de formule  $\varphi$  voorkomen.) Doe hetzelfde voor  $b$  in plaats van  $a$ .

**Opgave 8.** Bewijs de formule  $(\exists x Px \rightarrow \exists y Qy) \rightarrow \forall x \exists y (Px \rightarrow Qy)$  met behulp van een semantisch tableau.