Tentamen Basiswiskunde en Logica

14 december 2009, 9:00–12:00 uur.

Hertentamen deel Basiswiskunde: Opgaven 1–4.

Deeltentamen Logica: Opgaven 5–8.

Diegenen die het deel Basiswiskunde al haalden maken dus alleen opgaven 5–8.

Motiveer uw antwoorden.

Opgave 1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie $f(x) = e^x$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie $g(x) = x^2$.

(a) Wat zijn de samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$ in dit geval?

(b) Geef van elk van de volgende functies aan of ze injectief zijn (zo niet, geef een tegenvoorbeeld): f, g, $f \circ g$, $g \circ f$.

Opgave 2. Definieer een equivalentierelatie $\sim$ op $\mathbb{Z}$ door $x \sim y$ als geldt dat $x - y$ deelbaar is door 5.

(a) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

(b) Hoeveel equivalentieklassen zijn er? Geef van elke klasse een representant.

Opgave 3. Bewijs met volledige inductie dat $8 \cdot 4^n - 2$ deelbaar is door 6 voor alle $n \geqslant 0$.

Opgave 4. Los op: $x_k = -2x_{k-1} + 5 \cdot 3^k$ $(k \geqslant 1)$, $x_0 = 9$.

Opgave 5. Harrop's formule is de propositionele formule

$$(\neg p \to q \vee r) \to (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r).$$

(a) Wat is een tautologie?

(b) Bewijs met behulp van een semantisch tableau dat Harrop's formule een tautologie is.

Opgave 6. Schrijf de formule $p \wedge (q \to r)$ in disjunctieve normaalvorm, dat wil zeggen, als een disjunctie van conjuncties.

Opgave 7. Beschouw het volgende model M met de elementen a, b, en c:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[r, bend right] & c \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Beschouw verder de taal met alleen het binaire predikaat R, en interpreteer Rxy in M als "er is een pijl van x naar y". Geef een predikaatformule $\varphi(x)$ met één vrije variabele x die a onderscheidt van de andere elementen, d.w.z. zodat die formule precies geldt voor a (als we x bedelen met a) en niet voor b en c. (Waarschuwing: a, b, en c zitten *niet* in de taal, dus mogen ook niet in de formule φ voorkomen.) Doe hetzelfde voor b in plaats van a.

Opgave 8. Bewijs de formule $(\exists x Px \to \exists y Qy) \to \forall x \exists y (Px \to Qy)$ met behulp van een semantisch tableau.