UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM
FACULTEIT FNWI

Deeltentamen Kansrekening en Statistiek voor AI
23 maart 2010 14.00 - 17.00

---

1. Stel je voor dat je meedoet aan de 500 meter schaatsen op de Olympische Winter Spelen. De winnaar wordt bepaald na twee wedstrijden. De kans dat je de eerste wedstrijd wint is 0.5. De kans dat je de totale wedstrijd, dus over twee races, wint, gegeven dat je de eerste gewonnen hebt, is 0.8. De kans dat je de totale wedstrijd wint, gegeven dat je de eerste niet gewonnen hebt, is 0.1.

   (a) Wat is de kans dat je de hele wedstrijd wint en goud haalt ?

   (b) Wat is de voorwaardelijke kans dat je de eerste wedstrijd niet wint, gegeven dat je de hele wedstrijd wint ?

   (c) Tijdens diezelfde winterspelen doe je ook mee aan de 1000 meter wedstrijd. Die vindt plaats na de 500 meter wedstrijden en bestaat ook uit twee races. We kijken hier alleen naar het totale resultaat over twee 1000 meter races.

   Als je de sprint gewonnen hebt dan ben je kennelijk in een goede vorm. Stel dus dat de kans dat je de (totale) 1000 meter wint, gegeven dat je de eerste 500 meter en de totale 500 meter wedstrijd hebt gewonnen, gelijk is aan 0.8. Bereken nu de kans dat je de de eerste 500 meter, de totale 500 meter en de (totale) 1000 meter wint.

2. Veronderstel dat de simultane kansverdeling van X en Y gegeven wordt door de volgende tabel:

		Y: 0	1	2	
X	-1	?	1/16	?	1/4
	0	?	1/8	1/8	?
	1	1/8	?	1/16	?
		1/2	?	1/4	

   (a) Gegeven is verder: $\mathrm{E}(X) = 0$. Vul de tabel aan.

(b) Zijn X en Y onafhankelijk ?

(c) Bepaal de kansverdeling van $Z = X + Y$.

~~(a) Gegeven is verder: E(X) = 0. Vul de tabel aan.~~

~~(b) Zijn X en Y onafhankelijk ?~~

3. De simultane kansdichtheid $f(x, y)$ van de stochasten X en Y wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} 3y^2 e^{-x} & , \text{ als } 0 \leq y \leq 1,\ x \geq 0, \\ 0 & , \text{ elders,} \end{cases}$$

~~voor een zekere positieve constante c.~~

(a) Bepaal de marginale kansdichtheden en verdelingsfuncties van X en Y.

(b) Bereken de variantie van Y.

(c) Zijn X en Y onafhankelijk ?

(d) Bereken de verwachting van $X + Y$.

4. Men beschikt over een dataset die men opvat als een realisatie van een rij stochasten $X_1, ..., X_n$. Men veronderstelt dat elke X_i, voor zekere $\theta > 0$, een verdeling heeft met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\theta^3}\left(\theta^2 - x^2\right) & , \text{ als } -\theta \leq x \leq \theta, \\ 0 & , \text{ elders.} \end{cases}$$

(a) Bereken de verdelingsfunctie en de variantie van X_1.

(b) Is het steekproefgemiddelde $\bar{X}_n$ een zuivere schatter van θ?

(c) Voor welke a en b is de schatter

$$T = a(X_1^2 + \ldots + X_n^2) + b$$

een zuivere schatter van θ^2 ?