2010-01-10 (11.00-12.30) Verzamelingenleer AI

ZET UW NAAM EN COLLEGKAARTNUMMER OP IEDER TENTAMENVEL!

Geef steeds een expliciet antwoord op de gestelde vraag.

Elk van de 8 opgaven telt even zwaar mee.

1. Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ en $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.
Geef een zo kort mogelijke omschrijving van de eerste 4 verzamelingen, gebruik de juiste notatie uit de verzamelingenleer. U hoeft geen argumenten te geven.

1. $B \cap \mathbf{Z}$
2. $\{ x \in \mathbf{N} \mid x < 7\} - \{ x \in A \mid x > 2\}$
3. $\{ ab \mid a \in A, b \in B\}$
4. $(\mathbf{N} \times A) \cap (\mathbf{N} \times B)$.
5. Geef een opsomming van de elementen in $\{1,2\}^2$.

2. Gegeven is een collectie C van boeken. We kunnen vier deelcollecties onderscheiden in deze collectie: N (boeken in de Nederlandse taal), P (Poëzie), R (Romans) en W (wetenschappelijke boeken).

Zij M de verzameling van mensen. De relatie $A \subseteq C \times M$ is de relatie tussen een boek uit de collectie en de auteur van het werk. We nemen aan dat ieder boek precies één auteur heeft. U weet natuurlijk dat Mulisch de auteur is van ‘De Aanslag’, dus er geldt $\langle \text{De-Aanslag, Mulisch}\rangle \in A$.

Formuleer de volgende uitdrukkingen in de taal van de verzamelingenleer

1) de wetenschappelijke boeken zijn niet in het Nederlands
2) er is geen buitenlandse poëzie in de collectie
3) de boeken van Mulisch zijn in het Nederlands
4) de Aanslag maakt deel uit van de collectie
5) ‘de Aanslag’ is het enige boek van Mulisch in de collectie

3. Op $\{1,2,3,4\}$ is de relatie R gedefinieerd door $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,2 \rangle\}$.

3a Wat is de transitieve afsluiting van R? Geef uw antwoord als een collectie paren, en ook met een tekening.

3b. Wat is de transitieve, symmetrische, reflexieve afsluiting van R? Geef uw antwoord als een collectie paren, en ook met een tekening.

4a. We onderzoeken de functie f op $\mathbf{R}$ die gedefinieerd is door $f(x) = x^2$.
Welke van de volgende eigenschappen heeft f: totaal, partieel, injectief, surjectief, bijectief ?
Geef tegenvoorbeelden bij totaal, injectief, surjectief als U zegt dat ze niet gelden.

4b. We onderzoeken de functie g op $\mathbf{N}$ die gedefinieerd is door $g(x) = x - 2$.
Welke van de volgende eigenschappen heeft g: totaal, partieel, injectief, surjectief, bijectief ?
Geef tegenvoorbeelden bij totaal, injectief, surjectief als U zegt dat ze niet gelden.

4c. We onderzoeken de functie h op $\mathbf{R}$ die gedefinieerd is door $h(x) = {}^1/_x$.
Welke van de volgende eigenschappen heeft g: totaal, partieel, injectief, surjectief, bijectief ?
Geef tegenvoorbeelden bij totaal, injectief, surjectief als U zegt dat ze niet gelden.

4d We onderzoeken de functie k op $\mathbf{Z}$ die gedefinieerd is door $k(x) = x + 1$.
Bepaal k^{-1} (6)? Geef enige toelichting.

5. Beschouw de volgende uitspraak:
Voor alle verzamelingen A en B geldt $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B)$.
Bent U het met deze uitspraak eens? Geef dan een voorbeeld waar A en B niet lege verzamelingen zijn.
Bent U het er niet mee eens, geef dan een voorbeeld waarmee U dat aantoont.

6. De relatie E op **N** geldt tussen x en y als x + y even is.
a. Ga voor alle eigenschappen van een equivalentie relatie na of E eraan voldoet. Geef enige toelichting.
b In geval dat E een equivalentierelatie is, geef aan wat de elementen zijn van $[1]_E$.
c Wat is de definitie van $[n]_E$?(hierbij is $n \in$ **N)**

7. We spelen een spel met kaarten. De kaarten zijn aan de achterkant allemaal gelijk, en aan de voorkant zwart of wit. Van beide typen zijn er 4 in het spel. Er zijn twee deelnemers: Els en Tara. Ieder krijgt precies één kaart die ze bekijken zonder dat de ander kan zien welke kaart het is.
Alles wat de deelnemers zeggen zijn ware uitspraken, en wordt door alle betrokkenen gehoord.

1. Modelleer deze situatie in een kennisdiagram.
2. Tara heeft van de kaartverdeler wat informatie gekregen. Ze zegt tegen Els ‘Als jij zwart hebt, dan heb ik wit.’ Wat is na deze uitspraak het kennisdiagram?
3. Els zegt vervolgens: ‘Ik weet niet wat de verdeling is’. Wat is na deze uitspraak het kennisdiagram?
4. Wat weet Tara nu over de situatie? Leg uit hoe je dat in het diagram ziet.

8 beantwoord de volgende vragen. een toelichting is niet nodig.
a. Wanneer is een relatie R van A naar B een functie?
b. Geef een voorbeeld van verzamelingen V en W, waarbij $V \times W$ uit precies vijf elementen bestaat.
c. Geef een voorbeeld van drie verzamelingen A,B en C, waarbij
$A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $C \cap A \neq \emptyset$, en $A \cap (B \cap C) = \emptyset$.