Lineaire Algebra Deeltentamen
25 oktober 2010, 10-12 u, C1.110

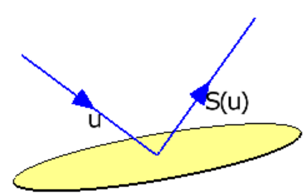
- De vragen zijn opgesplitst in deelvragen om je denkproces te structureren en zoveel mogelijk te kunnen goedrekenen. De deelvragen hangen daardoor deels samen. Maar ze zijn ook zoveel mogelijk onafhankelijk gemaakt. Als je iets niet weet kan je vaak een paar deelvragen later weer instromen!
- Blijf kalm en veel succes!

1 Normaal afstandelijk

1. Laat zien dat de 2D lijn L met vergelijking $x_1 - 2x_2 = 5$ onder andere de punten met vectoren $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ bevat.
2. Bepaal expliciet de verzameling van *alle* vectoren naar punten op de lijn L (dus de 'vector-voorstelling' van de lijn).
3. Bereken een eenheidsnormaalvector $\vec{n}$ (*unit normal vector*) voor deze lijn.
4. Schrijf de vergelijking van lijn L in de vorm $\vec{n} \cdot \vec{x} = \delta$, met $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
5. Wat is de afstand van de lijn L tot de oorsprong?
6. Omgekeerd: gegeven de punten $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, geef een berekening die leidt tot een vergelijking voor de lijn door die punten. (Hint: wat zijn de onbekenden? Kan je daar een stelsel lineaire vergelijkingen voor opstellen?)
7. Wanneer zou de vraag om een lijn door punten met vectoren $\vec{p}$ and $\vec{q}$ te bepalen tot een inconsistent stelsel kunnen leiden?

2 Snell, snel

Als je in computer graphics een reflectie wilt uitrekenen van een binnenkomende lichtstraal met richting $\vec{u}$, dan gebruik je de goede oude Nederlandse wet van Snell: *hoek van inval is hoek van terugkaatsing*. We willen die wet omzetten in een matrixberekening, dan kan hij snel in hardware. Voor het gemak nemen we een straal en vlak waarbij het reflectiepunt in de oorsprong ligt. De richtingsvector van de invallende lichtstraal noemen we $\vec{u}$, de uitgaande $S(\vec{u})$.



1. Op wikipedia vinden we de formule voor de spiegeling in een vlak met normaalvector $\vec{n}$:

$$S(\vec{u}) = \vec{u} - 2\,\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\,\vec{n} \tag{1}$$

   Blijkbaar blijft de formule hetzelfde als we $\vec{n}$ vervangen door een veelvoud $\alpha\,\vec{n}$. Waarom moet dat inderdaad zo zijn in ons graphics probleem?
2. Neem nu even voor het gemak $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, en laat met een schets zien waarom formule 1 klopt.
3. Laat zien dat $S(\vec{u}) \cdot S(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u}$. Wat betekent dit geometrisch, in woorden?
4. Wat gebeurt er met de uitkomst van formule 1 als de invallende lichtstraal in het reflectievlak ligt? Is dat wenselijk?
5. Hoe kan je in een programma testen of de lichtstraal niet echt 'van buitenaf' aankomt op het spiegelvlak, als we dat zien als buitenkant van een object? (Want dan wil je waarschijnlijk de formule niet gebruiken!) Neem aan dat $\vec{n}$ naar buiten wijst.
6. Wat zijn de definiërende eigenschappen van een lineaire afbeelding (lineaire transformatie)?

7. Waarom kan een lineaire transformatie altijd worden geschreven als een matrix?
8. Even verder op de wikipedia pagina staat dat de matrix van S is:

$$[S] = \frac{1}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \begin{bmatrix} -n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & n_1^2 + n_2^2 - n_3^2 \end{bmatrix}.$$

   Laat zien dat deze matrix inderdaad de lineaire afbeelding van formule 1 implementeert. Hint: bereken $S[\vec{e}_1]$.
9. (Ook als bovenstaand niet allemaal lukte kan je de rest vast wel!) Bepaal de matrix van de Snell-reflectie met een spiegel in het $\vec{e}_1, \vec{e}_2$-vlak in 3D.
10. Bereken de reflectie van een lichtstraal in de richting $-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$ en een lichtstraal in de richting $-\vec{e}_3$ in dat specifieke geval van vraag 9.
11. Als je het licht de andere kant opstuurt (dus $-S(\vec{u})$ als input neemt) wat verwacht je dan als output? Wat betekent dat voor de matrix $[S]$, in matrixtaal? Verifieer dat voor het specifieke geval van vraag 9.

3 Kernachtig

Een matrix die projecteert op een bepaald vlak door de oorsprong is gegeven als:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

1. Bepaal de RREF (*reduced row echelon form*) van P.
2. Laat zien dat de rang (*rank*) van P gelijk is aan 2. *Als dat niet zo is, controleer dan je RREF, want de volgende vragen hangen daar sterk vanaf!*
3. Maak gebruik van de RREF om een basis voor de kern (*kernel* of *nullspace*) van P te bepalen.
4. Controleer dat de basis van de kern inderdaad goed berekend is door op al die basisvectoren de matrix P toe te passen.
5. Beschrijf deze $\ker(P)$ geometrisch (is het een punt, lijn, vlak, ruimte, en welke precies?).
6. Maak gebruik van de RREF om een basis voor het beeld $\text{im}(P)$ (ook bekend als het *image* of de *column space*) van P te bepalen.
7. Beschrijf deze $\text{im}(P)$ geometrisch (is het een punt, lijn, vlak, ruimte, en welke precies?).
8. Wat is $\dim(\text{im}(P)) + \dim(\ker(P))$ voor deze matrix P?
9. **Bonus:** Wat is nu het vlak waarop deze matrix projecteert, en wat is de projectierichting?
10. Bereken de inverse van P, als die tenminste bestaat.