Tentamen Programmatuur
25 oktober 2010

`Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. Lees de opgaven zorgvuldig, schrijf duidelijk en beargumenteer je antwoorden. Schrijf op elk ingeleverd blad je naam en je collegekaartnummer. Je mag gebruik maken van het boek` ***`Programma-Algebra, een Inleiding tot de Programmatuur,`*** `I. Bethke en A. Ponse, Vossiuspers UvA, 2003. Het gebruik van een rekenmachine is NIET toegestaan. Succes!`

1. Zij $X = \#3; +a; ((!; \#1; \#9; +a)^2)^\omega$ en $Y = ((\#1; +a; !)^\omega; b; +a; !; b; +a)^\omega$.
   (a) Bepaal voor X en Y een *eerste canonieke vorm.* Laat duidelijk zien welke van de vergelijkingen PGA1–4 je gebruikt!
   (b) Zijn X en Y instructierij-congruent? Beargumenteer!
   (c) Bepaal voor X en Y de *minimale tweede canonieke vorm.* Laat duidelijk zien welke van de vergelijkingen PGA1–8 je gebruikt!
   (d) Zijn X en Y structureel congruent? Beargumenteer!

2. Zij

$$X = £0; +a; \#\#£1; +b; \#\#£2; £1; \#\#£1; £2; +c; !; d; \#\#£0$$
$$Y = (+a; \#2; -b; \#0; +c; d; !)^\omega.$$

   (a) Geef een regulier stelsel dat het gedrag van X beschrijft.
   (b) Geef een regulier stelsel dat het gedrag van Y beschrijft.
   (c) Geldt $|X|_{pgle} = |Y|$? Zo ja, bewijs dan met volledige inductie dat $\pi_n(|X|_{pglec}) = \pi_n(|Y|)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zo nee, vind dan een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $\pi_n(|X|_{pgle}) \neq \pi_n(|Y|)$.

3. Zij X het PGLEc-programma $+a\{*; b; *\}; c; !$.
   (a) Pas uitgaande van X de projecties `pglecw2pglec`, `pglec2pgle`, `pgle2pgldg`, `pgldg2pgld`, `pgld2pglc` en `pglc2pglb` toe.
   (b) Geef een PGA-programma in *iteratieve kanonieke vorm* dat hetzelfde gedrag definieert als X.

4. In deze opgave beschouwen we het input/outputmodel op de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. De acties zijn *succ*, *pred* en *odd* met $\mathit{effect}_{succ}(n) = n + 1$,

$$\mathit{effect}_{pred}(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0, \\ n - 1 & \text{anders} \end{cases}$$

en $\mathit{effect}_{odd}(n) = n$. Dus *succ* telt bij een toestand 1 op en *pred* trekt er 1 van af indien mogelijk; *odd* dient als testinstructie en verandert een toestand niet. Als yieldfuncties gebruiken we $y_{succ}(n) = \texttt{true}$ en

$$y_{pred}(n) = \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } n > 0, \\ \texttt{false} & \text{anders,} \end{cases} \qquad y_{odd}(n) = \begin{cases} \texttt{true} & \text{als } n \text{ is oneven,} \\ \texttt{false} & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Bereken de volgende paden:

i. $|(+odd; \#3; -pred; !; succ)^{\omega}| \bullet^{vpad} 1$

ii. $|(-pred; \#3; -succ; !)^{\omega}| \bullet^{vsvpad} 0$

(b) Schrijf een PGLE-programma X dat voor oneven getallen de modulus 3 berekent en voor even getallen niet termineert, d.w.z. een programma X met de eigenschappen

$$|X|_{pgle} \bullet n = \begin{cases} n \mod 3 & \text{als } n \text{ is oneven,} \\ D & \text{anders.} \end{cases}$$

(Merk op: voor natuurlijke getallen n is $n \mod 3$ de rest bij geheeltallige deling van n door 3. B.v. $0 \mod 3 = 0$, $4 \mod 3 = 1$ en $5 \mod 3 = 2$.)

5. In deze opgave beschouwen we een op MPP gebaseerd model voor de natuurlijke getallen. Ieder natuurlijk getal heeft in dit model een s-veld dat naar zijn opvolger verwijst. Getallen groter dan 0 hebben bovendien een p-veld dat naar de voorganger verwijst. Het model bestaat uit de volgende programma's:

$$\begin{aligned} &setZero = Z = new; y = Z \\ &pred = -x/p\{; y = x; \}\{; y = x.p; \} \\ &succ = -x/s\{; x. + s; y = new; y. + p; y.p = x; x.s = y; \}\{; y = x.s; \} \end{aligned}$$

(a) Op de natuurlijke getallen wordt het 2-voud $2\times$ als volgt gedefinieerd:

$$2 \times x = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0, \\ 2 \times (x - 1) + 2 & \text{anders.} \end{cases}$$

Schrijf een PGLEc-programma dat deze definitie implementeert. Je mag hierbij gebruik maken van de afkortingen *setZero*, *succ* en *pred*.

(b) Teken de molecule die door het programma

$$setZero; x = y; succ; x = y; 2\times; x = y; 2\times$$

wordt verkregen.

(c) Geef nu ook voor ieder n implementaties van $2^n\times$.