Logica AI 23 december 2010, 16.00-18.00

ZET UW NAAM EN COLLEGKAARTNUMMER OP IEDER TENTAMENVEL!
Maak opgave 1 tm 5 op het ene tentamenvel, en 6 tm 10 op het andere tentamenvel.

Alle opgaven tellen even zwaar mee.

1. Vertaal onderstaande zinnen in propositielogica. Gebruik de aangegeven vertaalsleutel.

1. *Er is nog soep in de koelkast, als je dat lekker vindt.*
   s = Er is soep in de koelkast, v = Jij vindt soep lekker
2. *Het is verboden de kunstwerken aan te raken of te fotograferen.*
   a =Je mag de kunstwerken aanraken, f = Je mag de kunstwerken fotograferen
3. *Als Johan topscoorder wordt als Marco vandaag niet scoort, dan moeten we een feest voorbereiden.*
   j = Johan wordt topscoorder, m = Marco scoort vandaag, f = we moeten een feest voorbereiden
4. *Jan komt alleen naar het feestje als Marie komt.*
   j = Jan komt naar het feestje, m = Marie komt naar het feestje
5. *Ik ben erg geduldig mits ik op het eind mijn zin krijg.*
   g = Ik ben geduldig, z = Ik krijg op het eind mijn zin

2. We onderzoeken de volgende twee formules:

(1) $\neg p \rightarrow \neg q$

(2) $\neg p \vee \neg q$

Ga met waarheidstafels na wat het antwoord is op de volgende twee vragen.

a) Is (1) een logisch gevolg van (2)?

b) Is (2) een logisch gevolg van (1)?

Leg uit hoe U op grond van de waarheidstafel tot Uw antwoord komt. Geef een tegenvoorbeeld als het geen logisch gevolg is.

3 Deze opgave gaat over modelleren, het is niet de bedoeling dat U met een slimme redenering de opgave oplost. U moet alle onderdelen modelleren (de bordjes, de informatie over waarheid) en tenslotte de oplossing vinden met waarheidstafels.)

Een gevangene kan kiezen tussen twee deuren. Achter elke deur is een kamer met een prinses of een tijger. Er kan achter beide deuren een tijger of een prinses zitten. Opent hij een deur met een tijger er achter dan wordt hij verslonden. Zit er een prinses achter, dan wordt hij vrij gelaten en mag met haar trouwen

Op elke deur hangt een bordje met een mededeling die waar of onwaar kan zijn.
Op deur 1 *In deze kamer zit een prinses en in de andere kamer een tijger*
Op deur 2 *In één van de kamers zit een prinses en in de andere een tijger*

Gevangene weet dat één van de zinnen onwaar is, en de andere waar.

Welke deur moet hij kiezen?

4a Wat betekent het als een verzameling C van connectieven functioneel volledig is?

4b. Hieronder staat het connectief connectief *. Geef een formule die equivalent is met p*q waarin alleen maar connectieven voorkomen uit de verzameling{ $\wedge$, $\vee$, $\neg$}.

p	q	p*q
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

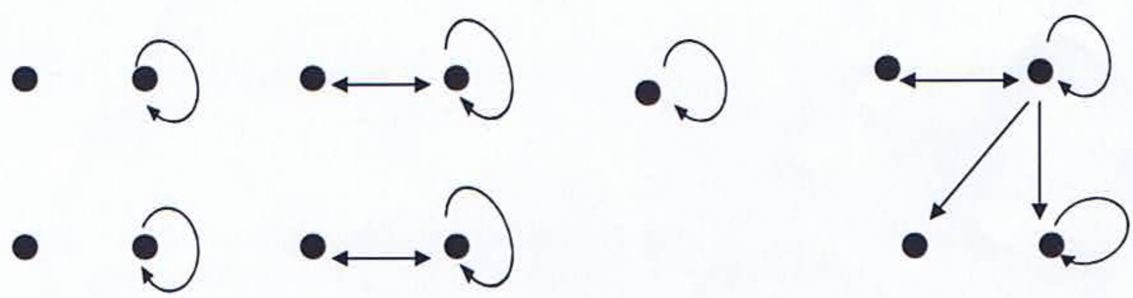
4c. U mag aannemen dat de verzameling { $\wedge$, $\vee$, $\neg$} functioneel volledig is. Toon vervolgens aan dat ook { $\vee$, $\neg$} functioneel volledig is.

5

Hieronder staan een aantal logische zinnen. We interpreteren ze in een viertal modellen. Het domein van de predikaten en relaties zijn de punten in deze modellen. Met R(x,y) geven we aan dat er een pijl loopt van x naar y. Geef voor elke zin aan in welke van de modellen deze zin waar is. Een toelichting is niet nodig.

a. $\forall x \exists y\, R(x,y)$
b. $\exists x \forall y\, R(x,y)$
c. $\forall x \exists y\, R(y,x)$
d. $\exists x \forall y\, R(y,x)$
e. $\forall x \exists y\, [\neg R(x,y)]$
f. $\exists x \forall y\, [\neg R(x,y)]$
g. $\forall x \exists y\, [\neg R(y,x)]$
h. $\exists x \forall y\, [\neg R(y,x)]$

Model 1 Model 2 Model 3 Model 4



6

We werken in deze opgave met een variant van eerste orde logica (predikaat logica) die geschikt is voor de rekenkunde. De taal bevat de constanten *1* , *2*, *3* en *4*; de predikaten *even* en *priem,* het relatiesymbolen = en < (kleiner dan) en het functiesymbool $\times$ (vermenigvuldiging). Gebruik geen machten zoals in y^2, maar schrijf vermenigvuldiging expliciet uit, zoals in $y \times y$. Let op, er is geen predikaat *kwadraat.*

Formaliseer de volgende beweringen:

a) Twee is een priemgetal en vier niet.
b) Er is een oneven kwadraat.
c) Het kwadraat van een priemgetal is niet priem.
d) Het kwadraat van een getal groter dan 1 is groter dan dat getal zelf.
e) Alleen twee is een even priemgetal.

7 <u>Taal van de vormenwereld</u>

De vormenwereld bestaat vormen die op een horizontale rij staan. Er zijn 3 soorten vormen beschikbaar, en van elke vorm 3 groottes. Vormen mogen elkaar niet overlappen.

Vierkant(a) a is een vierkant is, *Driehoek(a)* een driehoek, *Cirkel(a)* een cirkel
Groot(a) betekent dat *a* groot is, analoog *Klein(a)* , *Med(a)* medium
Links(a,b) betekent dat *a* links van *b* staat *Rechts(a,b)* analoog.
ZelfdeGrootte(a,b) *a* en *b* zijn allebei groot, of klein of medium
Naast(a,b) *a* staat direct naast *b*
Kleiner(a,b) betekent dat *a* kleiner is dan *b*.
Groter(a,b) betekent dat *a* groter is dan *b*.

Vertaal in predikaatlogica.

a. Iedere driehoek die naast een vierkant staat is klein
b. Er is een cirkel die naast alle vierkanten staat.
c. Geen vierkant of cirkel is klein
d. Iedere driehoek die naast een vierkant staat is groter dan dat vierkant
e. Als een driehoek naast een driehoek staat, dan zijn ze even groot.

8a.

Laat door middel van een model zien dat de volgende redeneringen niet geldig is:

$\exists x\, Ax, \exists x\, Bx, \forall x \forall y\, [(Ax \wedge By) \rightarrow (x \neq y \wedge Rxy)]$ dus $\forall x\, \exists y\, [Rxy \vee Ryx]$.

b Toon aan dat de volgende verzameling formules consistent is.

$\{\exists x\, \exists y\, \exists z\, [x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z], \forall x \forall y\, [R(x,y) \vee Ryx]\}$

c Toon aan dat de volgende verzameling formules consistent is.

$\{\forall x\, \neg R(x,x), \forall x_1 \forall x_2 \forall y\, [R(x_1,y) \wedge R(x_2,y) \rightarrow x_1 = x_2], \forall x \exists y\, R(x,y), \exists x \forall y\, \neg R(y,x)\}$

9

Zet in prenexvorm door de equivalenties stap voort stap toe te passen (1 stap tegelijk).

$\exists x\, [\text{Cirkel}(x)] \rightarrow \exists x\, [\text{Groot}(x)]$

10

We werken met een dialect van predicaatlogica waarin de predicaten A en B voorkomen, en meer niet. Met Z_1 geven we de zin $\forall x\, [A(x) \vee B(x)]$ aan.

a. Geef een zin Z_3, verschillend van Z_1, zodat de redenering Z_1 / Z_3 niet logisch geldig is.
b. Geef een zin Z_4, verschillend van Z_1, zodat $Z_1 \vee Z_4$ een tautologie is.
c. Geef zinnen Z_5 en Z_6 , beide verschillend van Z_1, met de eigenschap dat $\{Z_1, Z_5\}$ en $\{Z_1, Z_6\}$ een model hebben, maar $\{Z_5, Z_6\}$ niet.
d. Geef een zin Z_7 die equivalent is met Z_1 maar geen $\forall$ en geen $\vee$ bevat.