Lineaire Algebra: Tweede Deeltentamen
20 december 2010, 13-15u, OMHP D108

- *Iedere vraag is hetzelfde waard.*
- *Doe alles zonder reken- of tekenmachine.* Calculators are for sissies!
- *Na afloop: prettige feestdagen!*

1 Minste Vierkanten Aanpak

Een beperkt 'kwadratisch model' wordt gegeven als $f(t) = c_1 t + c_2 t^2$. Men meet de volgende dataparen $(t, f(t))$: (-1,11), (0,6), (1,11), (2,22) en probeert daarmee het best mogelijke model te bepalen met de kleinste kwadraten methode.

1. Hoeveel onbekenden heeft dit probleem?
2. Tot welke vergelijkingen leidt dit probleem?
3. Geef de ene matrixvergelijking die dat stelsel vergelijkingen samenvat.
4. *Algemene vraag:* het image van een matrix M is een deelruimte (Engels: *subspace*). Alle vectoren die loodrecht staan op alle vectoren in het image van M vormen ook een deelruimte. Toon dat aan.
5. *Algemene vraag:* Je kunt die deelruimte van de vorige vraag uitdrukken (en ook berekenen) in termen van M^T. Hoe?
6. *Algemene vraag:* In de kleinste kwadraten oplossingsmethode van de vergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ wordt geëist dat $A\,\vec{x}^* - \vec{b}$ loodrecht staat op $\mathrm{im}(A)$. Waarom, geef een uitleg en een schets.
7. Los de kleinste-kwadraten-vergelijking $A^T A\,\vec{x}^* = A^T\vec{b}$ op voor deze data van dit model.
8. Plot de data en je optimale model. Evalueer het model zeker op t gelijk aan $-1, 0, 1, 2$.
9. Wat is er nu *precies* optimaal in het zo berekende model, met betrekking tot de data?
10. Als de data vervangen wordt door $(t, f(t))$ gelijk aan $(-1, \alpha)$, $(0, \beta)$, $(1, \gamma)$, $(2, \delta)$, dan blijkt dat de kleinste-kwadraten-oplossing voor dit model niet afhangt van β. Dat zou je kunnen verifiëren door een berekening, maar je kunt het ook inzien. Dus: waarom heeft β geen invloed?

2 Sneeuw Valt Dagelijks

We gaan de SVD van de matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bepalen.

1. Wat is de definiërende eigenschap van een orthogonale transformatie?

2. Wat is een makkelijke te verifiëren gevolg voor de matrix van de orthogonale transformatie?

3. Wat betekent SVD?

4. De SVD is gebaseerd op de vondst dat je door een analyse van $A^T A$ een stel loodrechte vectoren kunt vinden die onder A loodrecht blijven. Maak dit statement meer precies door op je antwoordblad de ontbrekende woorden te geven in de volgende zin:

   De genormalizeerde .... van $A^T A$ behorende bij verschillende .... vormen een .... basis die onder A transformeert tot een .... basis. De basisvectoren worden daarbij vermenigvuldigd met hun '......... ....', die overeenkomen met de .... van de .... van $A^T A$.

5. Het eindresultaat van de SVD van een matrix A is $A = U \Sigma V^T$. Wat voor soort matrices zijn dit, dus wat zijn de eigenschappen van U, Σ, V?

6. In onze puzzel is A een 3×2 matrix, dus wat zijn de afmetingen van U, Σ en V?

7. Bepaal $A^T A$ en check dat hij symmetrisch is.

8. Laat zien dat er eigenwaarden van $A^T A$ zijn gelijk aan 100 en 25.

9. Geef een orthonormale eigenbasis voor $A^T A$ en bepaal daarmee V.

10. Je hebt nu al bijna genoeg voor de SVD, alleen voor U moet je nog een berekening uitvoeren. Bereken van U de eerste twee kolomvectoren.

11. Realiseer je uit vraag 2.6 wat de grootte van U moet zijn. Bereken nu de eventuele andere kolomvectoren van U, zodat hij de eigenschap van je antwoord bij 2.5 heeft.

12. Geef de complete SVD van A met behulp van de voorgaande resultaten.

13. Als je de SVD van A kent, hoe kan je dan heel gemakkelijk de SVD van A^T bepalen?

14. Bepaal de singuliere waarden van A^T (je hoeft hier niet voor te rekenen).

15. *Algemene vraag:* Twee mensen rekenen van een matrix de SVD uit met de computer en krijgen verschillende antwoorden. Beiden hebben gelijk. Wanneer kan zoiets optreden? (Hint: het kan ook voor onze A; maar hoe algemener toepasbaar je antwoord is, hoe beter.) Wat moet er hetzelfde zijn aan hun antwoorden, wat kan verschillen?